

	Up ! Enhanced Management	Première édition
	3 Le marketing 3.7 Les études en marketing	http://www.up-comp.com contact@up-comp.com

$$\varepsilon_i = (Y_i - f(X_i))^2 = (Y_i - (\alpha * X_i + \beta))^2 = Y_i^2 + (\alpha^2 * X_i^2 + \beta^2 + 2 * \alpha * X_i * \beta) - 2 * Y_i * (\alpha * X_i + \beta)$$

Et l'erreur totale est égale à :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

Elle est minimale si les dérivées par rapport aux paramètres α et β s'annulent :

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta \alpha} = 0 \text{ et } \frac{\delta \varepsilon}{\delta \beta} = 0$$

Avec :

$$\frac{\delta \varepsilon_i}{\delta \alpha} = 2 * \alpha * X_i^2 + 2 * X_i * \beta - 2 * Y_i * (X_i) = 2 * X_i * (\alpha * X_i + \beta - Y_i)$$

Et :

$$\frac{\delta \varepsilon_i}{\delta \beta} = 2 * \beta + 2 * \alpha * X_i - 2 * Y_i$$

Donc :

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta \varepsilon_i}{\delta \alpha} = \sum_{i=1}^n 2 * X_i * (\alpha * X_i + \beta - Y_i) = 0$$

Et :

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta \varepsilon_i}{\delta \beta} = \sum_{i=1}^n (2 * \beta + 2 * \alpha * X_i - 2 * Y_i) = 2 * \sum_{i=1}^n (\beta + \alpha * X_i - Y_i) = 0$$

De la seconde expression :

$$n * \beta + \alpha * \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i = 0$$

Soit :

$$\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n Y_i = \alpha * \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n X_i + \beta$$

Soit :

$$\bar{Y} = \alpha * \bar{X} + \beta$$

Nous en déduisons que la droite de régression passe par le point $(\bar{X}; \bar{Y})$. La valeur de β est alors :

$$\beta = \bar{Y} - \alpha * \bar{X}$$

En la remplaçant dans la première expression, cela donne :

$$2 * \sum_{i=1}^n X_i * (\alpha * X_i + \beta - Y_i) = 2 * \sum_{i=1}^n X_i * (\alpha * X_i + (\bar{Y} - \alpha * \bar{X}) - Y_i) = 0$$

Soit :