

	Up ! Enhanced Management	Première édition
	3 Le marketing 3.7 Les études en marketing	http://www.up-comp.com contact@up-comp.com

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \alpha * (X_i - \bar{X}) + \alpha * (X_i - \bar{X}))^2$$

Soit :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \alpha * (X_i - \bar{X}))^2 + \frac{2}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \alpha * (X_i - \bar{X})) * (\alpha * (X_i - \bar{X})) + \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (\alpha * (X_i - \bar{X}))^2$$

Soit :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \alpha * (X_i - \bar{X}))^2 + \frac{2 * \alpha}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \alpha * (X_i - \bar{X})) * (X_i - \bar{X}) + \frac{\alpha^2}{n} * \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Pour le terme central :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \alpha * (X_i - \bar{X})) * (X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) * (X_i - \bar{X}) - \alpha * \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) * (X_i - \bar{X})$$

Soit, par définition de α :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \alpha * (X_i - \bar{X})) * (X_i - \bar{X}) = \text{Covariance}(X, Y) - \alpha * \text{Variance}(X) = 0$$

Donc en éliminant le terme central :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \alpha * (X_i - \bar{X}))^2 + \frac{\alpha^2}{n} * \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Soit :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha * X_i - (\bar{Y} - \alpha * \bar{X}))^2 + \frac{\alpha^2}{n} * \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Soit puisque la droite de régression passe par le point (\bar{X}, \bar{Y})

:

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - (\alpha * X_i + \beta))^2 + \frac{\alpha^2}{n} * \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Posons :

$$r = \frac{\text{Covariance}(X, Y)}{\sigma_X * \sigma_Y}$$

Donc :

$$\alpha = r * \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Alors :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Y_i - (\alpha * X_i + \beta))^2 + r^2 * \sigma_Y^2$$