$$\frac{d\,E(dS^2)}{dt} \approx \sigma^2 \qquad (4)$$

Ceci est la caractéristique d'un mouvement brownien : une vibration à dérive linéaire dans le temps.

En reprenant le principe de la stratégie de gestion du risque, l'insvestisseur peut se constituer un portefeuille composé de **sous-jacents** de prix ***S*** et de **calls** de prix ***C*** sur ceux-ci. Nous cherchons la combinaison optimale du portefeuille de la sorte à ce que celui-ci soit équivalent à un placement sans risque capitalisé au taux d'intérêt $\tau_{\text{Intérêt}}$.

Soit alors la constante ***k*** telle que :

$$P = C - k * S$$

Alors :

$$dP = dC - k * dS$$

Ces valeurs étant des variables aléatoires, nous prenons l'espérance :

$$E(dP) = E(dC) - k * E(dS) \qquad (5)$$

En faisant un développement limité sur la variation de prix ***dC*** de l'option en fonction du temps ***dt*** et de la variation du prix du sous-jacent ***dS***, nous avons :

$$dC = \frac{dC}{dt}dt + \frac{dC}{dS}dS + \frac{1}{2} * \frac{d^2C}{dS^2} * dS^2$$

Ces valeurs étant des variables aléatoires, nous prenons l'espérance :

$$E(dC) = \frac{dC}{dt} * E(dt) + \frac{dC}{dS} * E(dS) + \frac{1}{2} * \frac{d^2C}{dS^2} * E(dS^2) = \frac{dC}{dt} * dt + \frac{dC}{dS} * E(dS) + \frac{1}{2} * \frac{d^2C}{dS^2} * E(dS^2)$$

En utilisant (4), cela devient :

$$E(dC) = \left(\frac{dC}{dt} + \frac{\sigma^2}{2} * \frac{d^2C}{dS^2}\right) * dt + \frac{dC}{dS} * E(dS)$$

En reportant dans (5), nous obtenons :

$$E(dP) = \left(\frac{dC}{dt} + \frac{\sigma^2}{2} * \frac{d^2C}{dS^2}\right) * dt + \left(\frac{dC}{dS} - k\right) * E(dS) \qquad (6)$$

Comme nous faisons l'hypothèse que le portefeuille est sans risque, il n'est pas influencé par les variations ***dS*** du prix du sous-jacent, donc :

$$k = \frac{dC}{dS} \qquad (7)$$

Cette hypothèse implique également que nous connaissons la variation ***dP*** du prix du portefeuille dans le temps :

$$dP = \tau_{\text{Intérêt}} * P * dt$$

Soit :

$$E(dP) = \tau_{\text{Intérêt}} * E(P) * dt = \tau_{\text{Intérêt}} * \left(E(C) - \frac{dC}{dS} * E(S)\right) * dt$$

Par équivalence avec (6) et avec la simplification induite par (7), nous avons :

$$E(dP) = \left(\frac{dC}{dt} + \frac{\sigma^2}{2} * \frac{d^2C}{dS^2}\right) * dt = \tau_{\text{Intérêt}} * \left(E(C) - \frac{dC}{dS} * E(S)\right) * dt$$

Ce qui donne après simplification et réaménagement des expressions :