Soit en prenant l'exponentielle :

$$\text{Valeur}_{\text{Exercice}}(T) = \text{Valeur}_{\text{Exercice}}(0) * e^{\tau_{\text{Intérêt}} * T}$$

Cependant, il ne s'agit pas de la valeur future mais de la valeur actualisée pour se ramener à t_0, ce qui revient à changer ***T*** par son opposé. Nous obtenons alors en ajustant (1) :

$$\text{Valeur}_{\text{Put}}(T) = \text{Valeur}_{\text{Call}}(T) - \text{Valeur}_{\text{SousJacent}}(T) + \text{Valeur}_{\text{Exercice}} * e^{-\tau_{\text{Intérêt}} * T} \quad (2)$$

Quand le prix courant ***S(T)*** du sous-jacent avoisine le prix d'exercice, certains investisseurs parient sur un dépassement du prix d'exercice et d'autres sur le contraire. Nous supposons que les investisseurs disposent toutes des mêmes informations quand bien même ils ont leur propre vision du marché et qu'ils sont indépendants dans leur choix.

Notons ***p*** la probabilité pour qu'un investisseur parie que le prix du sous-jacent augmente de ***dS*** sur une période ***dt***. En ce cas, il y a une probabilité ***1-p*** pour le prix du sous-jacent diminue de ***dS*** sur une période ***dt***. ***dS*** évolue donc suivant une loi de probabilité de ***Bernouilli***.

L'espérance de la variation élémentaire du prix du sous-jacent est alors :

$$E(dS) = p * dS + (1-p) * (-dS) = (2p-1) * dS$$

La variance de la variation élémentaire du prix du sous-jacent est alors :

$$V(dS) = E(dS^2) - (E(dS))^2 = p * dS^2 + (1-p) * (-dS)^2 - (2p-1)^2 * dS^2$$

$$V(dS) = (1 - 4p^2 - 1 + 4p) * dS^2 = 4p * (1-p) * dS^2$$

Sur une période de temps ***t***, correspondant à $n = \frac{t}{dt}$ variations élémentaires, qui sont indépendantes d'après les hypothèses, nous avons :

$$E(S(t)) = (2p-1) * dS * \frac{t}{dt} = (2p-1) * \frac{dS}{dt} * t$$

La variance de la variation élémentaire du prix du sous-jacent est alors :

$$V(S(t)) = 4p * (1-p) * dS^2 * \frac{t}{dt} = 4p * (1-p) * \frac{dS^2}{dt^2} t * dt$$

En posant $\mu = (2p-1) * \frac{dS}{dt}$ et $\sigma^2 = 4p * (1-p) * \frac{dS^2}{dt^2}$ nous avons :

$$E(S(t)) = \mu * t \text{ et } V(S(t)) = \sigma^2 * t \quad (3)$$

S(t) évolue donc suivant une loi de probabilité binomiale.

Lorsque ***n*** est grand – supérieur à 30 en pratique –, la loi des grands nombres s'applique, ce qui signifie que la loi de probabilité binomiale tend vers une loi normale qui a pour paramètres dans ce cas de figure $N(S \leq s ; \mu * t ; \sigma * \sqrt{t})$.

D'autre part, pour toutes les lois de probabilités, la relation suivante est vérifiée :

$$V(dS) = E(dS^2) - (E(dS))^2$$

Donc :

$$E(dS^2) = V(dS) + (E(dS))^2$$

En prenant la variation infinitésimale, nous avons :

$$d\,E(dS^2) = d\,(V(dS) + d\,(E(dS)))^2 = d\,V(dS) + 2 * E(dS) * d\,E(dS) = \sigma^2 dt + 2 * \mu * t * \mu * dt = (\sigma^2 + 2 * \mu^2 * t) * dt$$

Pour ***t*** petit, nous avons :